



Н. М. Кащенко

ФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ В УСЛОВИЯХ РАБОТЫ ДРЕНАЖА

Рассмотрена модель фильтрации в дренажной системе, учитывающая фрактальные свойства грунта.

A model of filtration in the drainage system that takes into account the fractal properties of soil.

Ключевые слова: математическое моделирование, фрактальная геометрия, уравнения в частных дробных производных, фильтрация.

Key words: mathematical modeling, fractal geometry, partial differential equations with fractional derivatives, filtering.

Введение

Применение фрактальной геометрии для исследования пространственной вариабельности почв может быть использовано для более точного моделирования фильтрационных процессов и водоудерживающей способности в неоднородных почвах, в том числе в условиях работы дренажной системы. На рисунке 1 показана картина растекания воды в почве в начальный период времени процесса. Анализ этого примера показывает его фрактальную природу.

На рисунке 2 приведены результаты численного моделирования методом Монте-Карло фрактального двумерного радиального растекания жидкости для разной длительности процесса. Длительности относятся как 1:3:9. Обработка результатов этого численного эксперимента (55 вычислений) выявляет эмпирическую зависимость:

$$S \approx \text{const} \cdot R^\alpha, \alpha \approx 1,70 \pm 0,10, \quad (1)$$

где S — площадь; R — радиус минимальной описанной окружности.

Метрическая размерность этих множеств, вычисленная в диапазоне от минимального моделируемого размера до R , приблизительно равна 1,7, что совпадает с показателем α в формуле (1). Если пространственное варьирование какого-либо почвенного свойства фрактально по самой своей природе, методы традиционного моделирования непригодны для его описания. Для учета такой фрактальной природы необходимо использовать адекватные математические методы, которые оперируют фрактальными свойствами почв.

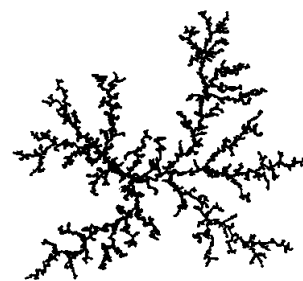


Рис. 1. Картина радиального растекания жидкости в пористой среде



Рис. 2. Численная модель фрактального радиального двумерного растекания жидкости для разной длительности процесса (отношение времен a, b, v : 1 : 3 : 9)

Математическая модель фильтрации



Дренажная система, моделируемая в работе, представляет собой набор горизонтальных дренажных трубок, расположенных параллельно друг другу на некоторой глубине, при этом с одной или двух сторон эти трубки имеют сток в водоотводящую сеть каналов. Обычно для моделирования процессов фильтрации в насыщенной зоне используется квазилинейное уравнение Буссинеска:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \left(\int_{H_0 - kL_d}^H K(z) dz \cdot \nabla H \right) + (\xi - \eta), \quad (2)$$

где H – уровень грунтовых вод, м; μ – коэффициент водоотдачи; $K(z)$ – скорость фильтрации в зависимости от уровня z , м/с; H_0 – уровень водоупора, м; L_d – расстояние между дренажами, м; k – коэффициент «висячести», $k=0,2-0,5$; $(\xi - \eta)$ – суммарный приток и отток, м/с; ∇ – оператор горизонтальной составляющей градиента.

Численные эксперименты с моделью (2) в условиях работы дренажных систем показывают несоответствие рассчитанных профилей уровней грунтовых вод (УГВ) в поперечном к дренажам направлении экспериментальным исследованиям. Для решения этой проблемы в работе предлагается использовать вместо модели (2) уравнения, использующие фрактальные свойства почв, обладающих аномальной диффузией в процессах фильтрации воды.

Термин «аномальная диффузия» обозначает процессы переноса на самоподобных структурах, характеризующиеся нестационарным распределением частиц в пространстве, где расстояние r , которое прошла частица за время t , растет по закону $r^2 = 2D \cdot t^\alpha$, где $\alpha=1$ для классического закона диффузии и $\alpha \neq 1$ для аномальной диффузии. Естественным математическим аппаратом описания процессов такой диффузии являются уравнения в частных дробных производных, описанные в [1].

Будем рассматривать уравнение с дробной производной по t . При этом в реальных задачах порядок дифференцирования не известен, следовательно, необходимо дополнительно ставить задачу нахождения вида уравнения аномальной диффузии, который связан со значением коэффициента α [1; 2]. Дифференциал Римана – Лиувилля – самая простая и часто употребляемая формула для дробной производной. Она является обобщением до произвольного порядка формулы повторного интегрирования Коши:

$$D_{[-\infty, t]}^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - q)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t - \tau)^{n - q - 1} f(\tau) d\tau. \quad (3)$$

В этой формуле n выбрано так, чтобы интеграл сходился. Оператор $D_{[-\infty, t]}^q$ обладает свойствами линейности

$$D_{[-\infty, t]}^q(ax) = aD_{[-\infty, t]}^q(x), \quad D_{[-\infty, t]}^q(x + y) = D_{[-\infty, t]}^q(x) + D_{[-\infty, t]}^q(y)$$

и полугрупповым свойством

$$D_{[-\infty, t]}^q D_{[-\infty, t]}^p(x) = D_{[-\infty, t]}^{q+p}(x).$$

Модифицированное с учетом аномальной диффузии уравнение (2) принимает следующий вид:

$$D_{[-\infty, t]}^q H = \nabla \left(\int_{H_0 - kL_d}^H K(z) dz \cdot \nabla H \right) + \xi - \eta, \quad (4)$$

где $D_{[-\infty, t]}^q$ – оператор дробного дифференцирования с параметром q .

При этом для $q=1$ получается обычное диффузионное уравнение, а для $q=2$ волновое уравнение. В численных экспериментах использовалось одномерное приближение модели (4) с координатой, направленной перпендикулярно дренажным трубкам. Это приближение допустимо вдали от концов дренажных труб. Для решения уравнения (4) в этом приближении применялся конечно-разностный метод с использованием прямоугольной равномерной сетки. Для аппроксимации правой части уравнения применена обычная неявная аппроксимация второго порядка точности по пространственным переменным. Для аппроксимации оператора дробного дифференцирования порядка q использовалась разностная схема первого порядка точности:

$$D_t^q u = \tau^{-q} (u_0 - C_1^q u_{-1} - C_2^q u_{-2} - \dots - C_n^q u_{-n} - \dots), \quad (5)$$



где $C_1^q = q, C_{n+1}^q = C_n^q \frac{n-q}{n+1}, n \geq 1$. При этом для коэффициентов схемы верно равенство $C_n^q + C_{n+1}^q + \dots = C_n^q \frac{n}{q}$.

Аппроксимация (5) приводит к монотонной разностной схеме при $0 < q \leq 1$ и к немонотонной при $q > 1$. Для устранения погрешности замены ряда (5) на конечную сумму разностные коэффициенты, начиная с некоторого места, приближаются геометрической прогрессией.

Численные оценки показывают, что оптимальным значением ее знаменателя является величина $(1 - 1,15 \cdot q^{0,83} / n)$, где n – номер слагаемого, с которого выполняется замена. Дальнейшее уменьшение погрешности достигается заменой коэффициентов $C_m^q, m \geq n$ на сумму нескольких геометрических прогрессий. Например, для двух прогрессий оптимальные значения знаменателей приближенно равны $(1 - 0,27 \cdot q^{1,80} / n)$ и $(1 - 1,77 \cdot q^{0,79} / n)$, погрешность по сравнению с одной прогрессией примерно в 2,1 раза меньше, а для трех прогрессий погрешность еще примерно в 3,2 раза меньше.

В модели использовалась аппроксимация тремя прогрессиями. Полученные разностные уравнения решались с использованием классической прогонки и итераций по нелинейности. Численные эксперименты с предложенной моделью показали, что она дает при $q < 1$ более реалистичные, по сравнению с исходными уравнениями, профили УГВ, что иллюстрируется рисунком 3. В частности, максимальное различие УГВ, соответствующее этому расчету, составляет 0,12 м, а среднеквадратичное значение разностной производной 3-го порядка для расчета с дробной производной в 2,1 раза больше, чем с классической производной, то есть ее форма сильнее отличается от параболической, что соответствует экспериментальным данным. На рисунке 3 минимумы соответствуют положению дренажных трубок. Моделирование осуществлялось при следующих условиях: расстояние между дренажными трубками 10 м, глубина заложения дренажа 1,2 м, глубина водоупора 2 м, коэффициент фильтрации почвы $1,16 \cdot 10^{-5}$ м/с, в начальный момент времени почва полностью насыщена. Коэффициент водоотдачи 0,1 для обычной производной и подбирался для дробной производной по совпадению максимумов УГВ с расчетами для обычной производной.

Вывод

Применение фрактальной модели фильтрации почвы приводит к более пологой форме поперечного дренам сечения УГВ, что соответствует экспериментальным данным и после эмпирического подбора параметров q и коэффициента водоотдачи μ позволяет более точно моделировать работу дренажной системы.

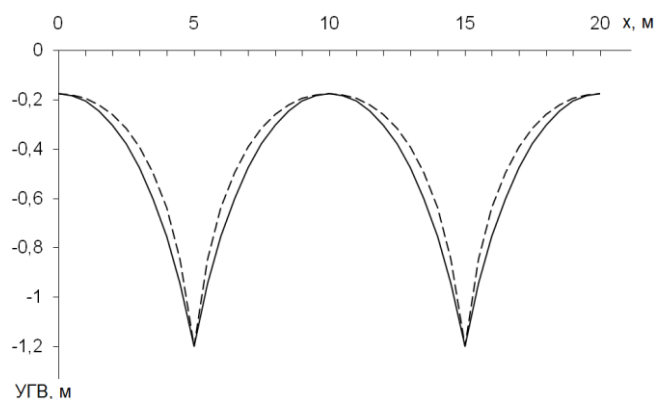


Рис. 3. Профили УГВ для 12 часов процесса с обычной производной по времени (сплошная линия) и с учетом дробной производной по времени для $q = 0,3$ (штриховая линия)

Список литературы

1. Беданюкова С. Ю. Математическое моделирование солевого режима почв с фрактальной структурой // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. 2007. 2(15). С. 102–109.



2. Мейланов Р. П., Свешникова Д. А., Шахбанов О. М. Метод дифференциальных уравнений дробного порядка в описании кинетики сорбции // Журнал физической химии. 2003. Т. 77, № 2. С. 260 – 264.

Об авторе

Н. М. Кашченко – канд. физ.-мат. наук, доц., РГУ им. И. Канта, e-mail: kaschtschenko@mail.ru

Author

Dr N. M. Kashchenko – assistant professor, IKSUR, e-mail: kaschtschenko@mail.ru